LES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN FRANCE DEPUIS UN DEMI-SIÈCLE,

Par Émile PICARD,
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917

LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

EN FRANCE

DEPUIS UN DEMI-SIÈCLE.

Cette étude a été insérée dans un Ouvrage publié en 1916 par divers littérateurs, savants et artistes, et intitulé : *Un demi-siècle de civilisation française* (1870-1915). Paris, Hachette et Cie.

LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

EN FRANCE

DEPUIS UN DEMI-SIÈCLE,

Par Émile PICARD,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

55, Quai des Grands-Augustins.

1917

LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES
EN FRANCE
DEPUIS UN DEMI-SIÈCLE.

On se propose d'indiquer ici succinctement la part prise par la France dans le progrès des Mathématiques pures pendant la seconde moitié du XIXe siècle et dans les premières années du siècle actuel, sans avoir la prétention de donner en quelques pages un tableau complet, et en laissant de côté des travaux trop récents, pour lesquels le recul paraît insuffisant.

Pendant la première moitié du XIXe siècle, les voies les plus fécondes avaient été ouvertes par Fourier, Cauchy et Galois. L'ouvrage de Fourier sur la théorie analytique de la chaleur est célèbre en Physique mathématique; il contient le germe des méthodes employées dans l'étude des équations différentielles auxquelles conduisent de nombreuses théories physiques, et les séries célèbres qui portent le nom de Fourier ont fait l'objet d'immenses généralisations. L'activité de Cauchy fut prodigieuse et s'étendit à tous les domaines des Mathématiques pures et appliquées. Sa plus grande création fut celle de la théorie des fonctions de variables complexes; il a ainsi donné une vie nouvelle à l'Analyse mathématique, et, en ce sens, les travaux les plus modernes relèvent de lui. On doit les notions les plus essentielles sur la théorie des groupes à Évariste Galois, qui en a fait d'admirables applications à la théorie des équations algébriques et montra qu'à chaque équation correspond un groupe de substitutions dans lequel se reflètent les caractères essentiels de l'équation. D'ailleurs les notions introduites par Galois dépassent de beaucoup en réalité le domaine de l'Algèbre et s'étendent au concept de groupe d'opé-

rations dans son acception la plus étendue. Si brève qu'ait été la vie de Galois, qui disparut à vingt ans dans une obscure querelle, il avait fait aussi en Analyse des découvertes capitales sur les intégrales de différentielles algébriques, comme le montre une lettre écrite la veille de sa mort.

Les trois grands noms que nous venons de citer sont représentatifs des mentalités que l'on rencontre chez ceux qui cultivent les sciences mathématiques. A ce sujet, il ne sera pas inutile d'indiquer les points de vue divers sous lesquels ces sciences peuvent êtres envisagées. Pour Fourier, l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. L'affirmation est exacte d'une manière générale ; il est vrai, comme le dit l'illustre géomètre et physicien, que la Physique a été souvent l'origine première de grandes théories analytiques, mais il ne faut pas ajouter que l'Analyse est uniquement utile au physicien, parce qu'elle constitue une langue d'une admirable clarté, qui n'a pas de signe pour exprimer les notions confuses et procure à la pensée une véritable économie. C'est méconnaître que le calcul a devancé parfois l'expérimentation, c'est méconnaître aussi l'admirable puissance de transformation du raisonnement et du calcul mathématiques. Des notions, identiques au fond, peuvent avoir des formes très différentes, et il arrive que la forme soit essentielle ; telle aussi l'énergie peut être constante en quantité, mais variable en qualité. La phrase, quelquefois citée, qu'il n'y a dans une formule que ce que l'on y a mis, est vide de sens ou n'est qu'un pur truisme. Il n'y a par exemple dans la Mécanique céleste que la loi de la gravitation universelle et quelques constantes fournies par l'observation, mais d'innombrables transformations de calcul nous font passer de ce point de départ à l'explication de presque toutes les particularités des mouvements des astres. Ce n'est pas assez non plus que de vanter la clarté du langage analytique ; en fait, il a joué un rôle important pour la plus grande extension des principes. Par le simple jeu de ses formules, l'Analyse peut suggérer des généralisations dépassant beaucoup le cadre primitif. N'en a-t-il pas été ainsi avec le principe des déplacements virtuels en Mécanique, dont l'idée première vient des mécanismes les plus simples ? La forme analytique qui le traduisait, où apparaissent des sommes de produits de deux facteurs, suggéra des extensions qui conduisirent

de la Mécanique rationnelle à la Mécanique chimique à travers la Physique tout entière. Un autre exemple est encore fourni par les équations de Lagrange ; ici des transformations de calcul ont donné le type des équations différentielles, auxquelles certains ont proposé de ramener la notion d'explication mécanique. Le mathématicien a créé un moule témoignant de l'importance de la forme d'une relation analytique ; il va de soi qu'il appartient à l'expérience de vérifier si l'instrument forgé est assez souple pour se prêter aux concordances expérimentales.

Si la Mécanique et la Physique mathématique sont pour le mathématicien pur une mine fructueuse, il s'en faut de beaucoup que les questions de Philosophie naturelle soient l'unique objet de ses méditations. On le comprend assez par ce qui précède, et la marche n'est pas parallèle entre la théorie pure et ses applications. Le monde des formes et des grandeurs abstraites est en lui-même un sujet d'études, sur lequel l'esprit humain fait travailler les règles logiques qu'il a lentement élaborées à travers les âges. L'imagination a aussi sa part dans ces recherches, et la Mathématique a une valeur à la fois scientifique et artistique. Là, comme dans bien d'autres domaines, le beau et l'utile se rejoignent parfois, et des spéculations théoriques, restées pendant longtemps éloignées de toute application, ont pu un jour être utilisées. Beauté et simplicité vont d'ailleurs de pair, et l'on sait que le mot *élégance* revient souvent sur les lèvres des géomètres.

Le XVIIe et le XVIIIe siècle virent presque toujours les mathématiques et leurs applications cultivées par les mêmes savants. Il devait arriver un moment où des spécialisations s'établiraient ; c'est une loi générale, qui régit malheureusement tous les ordres de recherches, et à laquelle échappent seuls quelques rares esprits, assez puissants pour ne pas avoir à sacrifier l'étendue à la profondeur. Les problèmes analytiques posés exigeaient de nouveaux perfectionnements. Une ère nouvelle commençait pour les mathématiques, rappelant, toutes proportions gardées, les temps où la Géométrie grecque, devenue autonome, s'était séparée des spéculations cosmogoniques auxquelles elle avait été liée à une époque antérieure. Fourier et Poisson cultivèrent à peu près exclusivement les parties de l'Analyse se rapportant à la Physique, tandis que les recherches de Galois furent d'un caractère essentiellement

abstrait. Quant à Cauchy, il fut à la fois un grand théoricien de la Physique et de la Mécanique, et un inventeur de génie en Mathématiques pures.

I. — Les fonctions analytiques.

Plaçons-nous maintenant dans les environs de 1850. Cauchy, avons-nous dit, est le créateur de la théorie des fonctions *analytiques;* non pas qu'il l'ait présentée d'une manière didactique. Son esprit, toujours en travail, se souciait peu de donner à ses conceptions une forme parfaite. Les lois des fonctions analytiques appliquées à des fonctions particulières ont souvent donné avec facilité leurs principales propriétés. La théorie des fonctions elliptiques en offre un mémorable exemple. Ainsi Liouville a traité le premier de la théorie générale des fonctions doublement périodiques; peu après, Hermite intégrait le long d'un parallélogramme de périodes et obtenait la décomposition fondamentale en éléments simples. Le Mémoire de Puiseux sur les fonctions algébriques d'une variable a fait époque, en donnant une idée précise d'un mode d'existence de fonctions non uniformes; c'est dans ce travail qu'est posée nettement la notion de période d'une intégrale, indiquée seulement par Cauchy. Briot et Bouquet ont été aussi parmi les premiers pionniers mettant en lumière la fécondité et la puissance des idées de Cauchy. Leur étude sur certaines équations différentielles à intégrales uniformes, et surtout leur Mémoire sur les singularités correspondant au cas où le coefficient différentiel est indéterminé, resteront dans l'histoire de la Science; ce dernier travail appelait pour la première fois l'attention sur les points singuliers. Dans leur grand Ouvrage sur les fonctions elliptiques, Briot et Bouquet ont voulu, suivant leur propre expression, rendre à Cauchy la justice qui ne lui a pas toujours été rendue.

On voit combien à ses débuts la théorie des fonctions d'une variable complexe a été une science essentiellement française; elle est toujours restée en grand honneur chez nous. Depuis quarante ans, une partie importante de notre effort a été consacrée, soit aux fonctions analytiques en général, soit à certaines fonctions spéciales. L'édifice fut repris à la base simultanément en France par Méray et en Allemagne par Weierstrass, en prenant comme

premier élément de la théorie la série entière. Les deux points de vue, celui de Cauchy, adopté plus tard par Riemann, et celui de Méray-Weierstrass, se raccordent d'ailleurs très vite, et il n'y a aucun intérêt, tout au contraire, à apporter là un esprit systématique.

Les fonctions analytiques ont fait pendant de nombreuses années l'objet de l'enseignement d'Hermite ; citons d'abord parmi ceux qui ont fait progresser la théorie générale les noms de Laguerre, Poincaré, Picard, Appell, Goursat, Painlevé, Hadamard, Borel. La démonstration du théorème de Cauchy sur l'intégrale nulle le long d'un contour supposait la continuité de la dérivée ; Goursat montra que cette hypothèse est inutile.

Cauchy et ses premiers disciples français avaient seulement considéré les pôles des fonctions uniformes. Le géomètre allemand Weierstrass appela l'attention sur une singularité plus complexe, le point singulier essentiel. Picard établit que, dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, la fonction prend une infinité de fois toute valeur donnée, une exception étant possible seulement pour *deux* valeurs au plus ; diverses conséquences résultent de là pour les fonctions entières. La démonstration utilisait la fonction modulaire de la théorie des fonctions elliptiques, fonctions à singularités plus élevées présentant précisément la propriété qu'on veut démontrer être impossible. Ces propositions donnèrent lieu à un grand nombre de travaux. Borel, le premier indiqua le principe d'une démonstration, où n'intervenait pas la transcendante indiquée.

Depuis 1880, les généralités sur les fonctions uniformes, mises sous forme de séries ou de produits infinis, ont été étudiées par les géomètres cités plus haut. Rappelons notamment les développements, en séries de polynomes, d'Appell et de Painlevé, les fonctions à espaces lacunaires de Poincaré et de Goursat, et plus récemment certains développements de Montel.

L'étude des séries entières sur leur cercle de convergence est de la plus haute importance. Dans son beau Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres, Darboux a tiré un parti très heureux du cas où les singularités sur ce cercle sont de nature simple. Le travail d'Hadamard sur cette question est fondamental et a appelé en particulier l'attention sur des cas étendus où le

cercle de convergence est une coupure; il a été suivi dans cette voie par Borel, Leau et Fabry; celui-ci a pu établir que, en général, le cercle de convergence est une coupure. La considération d'une certaine intégrale définie par Hadamard a été féconde et fut l'origine de nombreuses recherches ultérieures.

La notion de genre a été introduite par Laguerre dans la théorie des fonctions *entières ;* elle est intimement liée à la distribution des racines de la fonction. Poincaré a donné une condition nécessaire pour qu'une fonction soit de genre donné. Hadamard put démontrer que la condition est suffisante, et il établit un lien entre la décroissance des coefficients et la croissance des racines; de ces résultats il a fait une application remarquable à l'étude d'une fonction célèbre considérée par Riemann dans la théorie des nombres premiers. Borel s'est occupé avec grand succès de la distribution des racines des fonctions entières et de l'impossibilité de certaines identités; il a étudié, après Hadamard, la difficile question de la croissance des fonctions entières, sujet qu'ont encore approfondi dans des études récentes Boutroux, Denjoy et Valiron.

La notion de série divergente sommable, telle qu'elle a été posée par Borel, s'est montrée très féconde pour l'extension d'une série entière au delà de son cercle de convergence, même dans le cas où le rayon de ce cercle est nul. On doit à Painlevé d'importants développements dans cet ordre d'idées, qui se raccorde avec les résultats de Mittag-Leffler sur *l'étoile* d'une fonction. La plupart des travaux précédents ont été exposés d'une manière didactique dans une collection précieuse sur la théorie des fonctions, publiée par Borel et ses collaborateurs français Lebesgue, Boutroux, Baire, Montel qui y font aussi connaître leurs travaux personnels.

La théorie générale des fonctions multiformes présente de grandes difficultés. Poincaré a démontré à ce sujet un théorème remarquable et bien inattendu : étant envisagée une fonction multiforme quelconque d'une variable, on peut exprimer fonction et variable par des fonctions uniformes d'un paramètre, résultat considérable qui montre que, au moins théoriquement, les fonctions multiformes se ramènent aux fonctions uniformes. Painlevé a fait une classification rationnelle des singularités des fonctions analytiques.

Si, d'une variable, on passe à deux variables les difficultés augmentent considérablement. L'extension aux intégrales doubles du théorème fondamental de Cauchy relatif aux intégrales prises le long d'un contour a été réalisée par Poincaré ; on en déduit la notion de résidu d'une fonction rationnelle. Il faut encore citer le théorème de Poincaré sur la possibilité de mettre sous la forme de deux fonctions entières toute fonction uniforme n'ayant que des singularités non essentielles à distance finie, résultat étendu par Cousin à un nombre quelconque de variables.

Jetons maintenant un coup d'œil sur quelques fonctions spéciales. Il n'en est pas qui aient été plus étudiées que les fonctions algébriques d'une variable depuis le Mémoire de Puiseux. La notion capitale du *genre* d'une courbe algébrique avait été entrevue par Abel ; elle fut certainement approfondie par Galois, comme le montre une lettre rappelée précédemment. Mais la théorie fut complètement reprise par Riemann et Weierstrass, et poussée à un haut point de perfection. Les intégrales de différentielles algébriques ont fait, au point de vue de la réduction, l'objet des travaux de Picard et de Poincaré. Appell s'est occupé des fonctions à multiplicateurs, et, dans le cas elliptique, a étudié les développements en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. La découverte des fonctions, que Poincaré a appelées *fonctions fuchsiennes*, et qui restent invariables, par les substitutions d'un groupe linéaire discontinu conservant une circonférence, restera à jamais mémorable. Ces fonctions lui ont permis de faire une représentation paramétrique uniforme d'une courbe algébrique quelconque : c'est là certainement un des résultats les plus profonds obtenus depuis cinquante ans en Analyse. Les fonctions fuchsiennes correspondant à une courbe de genre supérieur à l'unité ont comme singularités essentielles soit la circonférence entière, soit sur celle-ci un ensemble parfait discontinu de points ; c'est ce qui résulte d'un théorème général de Picard, d'après lequel deux fonctions uniformes autour d'un point, liées par une relation algébrique de genre supérieur à *un*, ne peuvent avoir ce point comme point singulier essentiel isolé. Il y a des groupes linéaires plus généraux que les groupes fuchsiens ; Poincaré les étudie sous le nom de *groupes kleinéens*. La circonférence

ici est remplacée par des courbes étranges ayant en chaque point une tangente mais n'ayant pas de courbure.

On peut développer les fonctions non seulement en séries et produits infinis, mais les mettre aussi sous forme de fractions continues. Laguerre et Halphen ont signalé à ce sujet des circonstances curieuses, et un Mémoire de Stieltjes renferme des résultats généraux sur la convergence de certaines fractions continues, convergence qui peut cesser le long de certaines lignes. Au point de vue historique, Laguerre paraît avoir donné le premier exemple d'une série divergente, d'où l'on peut déduire une fraction continue convergente.

Dans le champ des fonctions spéciales de plusieurs variables, les fonctions abéliennes ont été le plus étudiées. Les Mémoires d'Hermite sur la division et la transformation de ces fonctions sont classiques. Poincaré, Picard et Appell ont donné diverses démonstrations de la relation énoncée, par Riemann, entre les périodes d'une fonctions de n variables à $2n$ périodes. Cousin a été le plus loin dans cette voie, en étudiant les relations entre les périodes d'une fonction de n variables à $n+2$ périodes. Les fonctions abéliennes *singulières* ont été l'objet des travaux d'Humbert, qui en a tiré des résultats intéressant non seulement la théorie des fonctions, mais aussi la géométrie et la théorie des nombres. On doit à Hermite l'étude de polynomes généralisant les polynomes de Legendre, et il a été suivi par Didon et par Appell qui a découvert aussi des séries hypergéométriques de deux variables. Des transcendantes nouvelles, présentant un théorème de multiplication et comprenant comme cas particuliers les fonctions abéliennes, ont été introduites par Poincaré et par Picard.

Après les études de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, il était naturel de rechercher des groupes discontinus à deux variables et des fonctions correspondantes. Les types sont ici très nombreux. L'étude des groupes linéaires et de certains groupes quadratiques a été abordée par Picard et l'a conduit aux fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes.

Quand on passe d'une à deux variables, les différences sont profondes dans la théorie des fonctions algébriques, comme il résulte des travaux de Picard, qui a posé les principes de la

théorie des intégrales de différentielles totales et des intégrales doubles attachées à une surface algébrique, ainsi que de leur périodicité. Les nombres des intégrales distinctes, simples et doubles, de seconde espèce sont deux *invariants* fondamentaux de la surface. Il faut y ajouter un troisième invariant, découvert ausssi par Picard, en relation étroite avec les courbes algébriques tracées sur la surface. Certains points de la théorie des surfaces algébriques peuvent être rapprochés de questions de *géométrie de situation*, questions difficiles, quand on les prend dans toute leur généralité, et sur lesquels Poincaré a écrit de profonds et difficiles Mémoires. Les surfaces hyperelliptiques, signalées d'abord par Picard, ont été étudiées d'une manière approfondie par Humbert, qui a découvert à leur sujet des théorèmes d'une grande élégance.

Je ne veux pas terminer ce Chapitre consacré aux fonctions analytiques sans rappeler que, dans ces dernières années, Borel a insisté sur ce que, des deux notions, *l'analyticité* au sens de Weierstrass, et la *monogénéité* au sens de Cauchy, c'est cette dernière qui est l'essentiel. La théorie des fonctions analytiques ne serait donc qu'un cas particulier de la théorie des fonctions monogènes.

II — Les équations différentielles.

Au XVIIe siècle, le développement de la Dynamique naissante fut l'origine des plus grands progrès de l'Analyse. Ce fut une époque décisive dans l'histoire de la Science que le moment où l'on se rendit compte avec précision que l'étude des phénomènes naturels était susceptible de prendre une forme mathématique, et cela surtout, quand le développement de la Mécanique conduisit à postuler que les modifications d'un système dépendent uniquement de l'état actuel de celui-ci ou, tout au plus, de cet état et de l'état infiniment voisin. On fut ainsi conduit à des équations différentielles, c'est-à-dire à des relations entre des fonctions et leurs dérivées. Cette idée a, depuis le XVIIIe siècle, orienté le développement de l'Analyse. Les problèmes posés par la Géométrie eurent aussi une part dans cette orientation. On voit donc l'importance de la théorie des équations différentielles dont nous allons suivre maintenant les principaux progrès.

C'est à Cauchy que l'on doit les premières démonstrations rigoureuses de l'existence des intégrales des équations différentielles. Quand les équations et les données sont analytiques, l'idée essentielle consiste dans la considération de fonctions majorantes; pour le cas général des systèmes d'équations aux dérivées partielles, la démonstration complète a été donnée par Riquier, Delassus et, dans un ordre d'idées un peu différent, par Cartan. Il y eut longtemps quelques hésitations sur la notion même d'intégrale générale pour une équation aux dérivées partielles; Ampère et Cauchy ne se plaçaient pas au même point de vue. Goursat a montré que le point de vue de Cauchy est plus général que celui d'Ampère.

Sans supposer les éléments analytiques, Cauchy a donné une méthode pour établir l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires ; les développements ainsi obtenus restent valables tant que les intégrales restent continues et laissent continus les coefficients différentiels, comme l'ont montré Picard et Painlevé. Pour le problème classique et d'autres plus généraux, quant aux conditions aux limites, on peut utiliser des méthodes d'approximations successives, dont Picard a donné des exemples très étendus, et qui présentent une grande marge dans leur application, comme l'ont montré ensuite les travaux d'Hadamard, de Coulon, d'Adhémar, de Cotton et autres.

Les équations linéaires sont particulièrement simples. L'étude des points singuliers réguliers avait été faite en Allemagne par Fuchs. Pour les points irréguliers, Poincaré a fait connaître des représentations asymptotiques très cachées des intégrales, valables sur un rayon partant du point singulier, mais pouvant varier quand le rayon change. Une admirable découverte de Poincaré, se rattachant à ses travaux sur les fonctions fuchsiennes, fut l'intégration des équations linéaires algébriques à points singuliers réguliers, au moyen de séries thétafuchsiennes. Parmi les équations spéciales, citons les équations hypergéométriques de Goursat, l'équation de Lamé intégrée par Hermite, les équations de Picard à coefficients doublement périodiques et à intégrale uniforme, les équations d'Halphen intégrables par des exponentielles et des fonctions rationnelles.

Dans les équations non linéaires on ne peut habituellement

tirer aucun parti de solutions particulières pour avoir l'intégrale générale ; c'est ce qui donne un grand prix à un travail de Darboux sur les équations du premier degré, pour lesquelles l'intégrale générale se déduit d'un certain nombre d'intégrales particulières. Les résultats anciens de Briot et Bouquet ont été d'abord complétés par Poincaré et par Picard, puis ensuite par Autonne et Dulac ; mais c'était là une étude locale. En dehors des points singuliers visibles sur l'équation, il peut y en avoir d'autres variables d'une intégrale à l'autre. Ceux-ci, d'après Painlevé, sont nécessairement des points critiques algébriques pour les équations du premier ordre, et Poincaré, complétant un résultat de Fuchs, avait montré que l'on est ramené, dans le cas des équations du premier ordre à points critiques fixes, à des quadratures ou à une équation de Riccati. Picard avait indiqué que la méthode de Poincaré ne pouvait pas s'étendre au second ordre, à cause de la possibilité d'une transformation univoque non birationnelle pour une surface. Les difficultés étaient considérables; elles ont été brillamment levées par Painlevé dans une série de travaux très remarquables qui le conduisirent à tous les types d'équations à points critiques fixes. Dans la voie ouverte par Painlevé, ont marché avec succès P. Boutroux, Gambier, Chazy et Garnier.

L'étude des équations différentielles dans le champ réel est capitale pour la Géométrie et la Mécanique. Poincaré a consacré de nombreux Mémoires à la question des courbes définies par des équations différentielles. Le cas le plus simple est celui des équations du premier ordre et du premier degré ; la nature des points singuliers, foyers, cols, nœuds, est d'abord discutée, puis sont envisagées les courbes intégrales fermées (cycles) et celles qui sont asymptotes à un cycle limite. Pour les équations du premier ordre et de degré supérieur, le *genre* d'une certaine surface fermée intervient dans la discussion, et ce n'est pas un des moindres mérites de Poincaré d'avoir montré le rôle de la Géométrie de situation dans ces questions. Parmi les recherches qui ont suivi, il faut au moins citer les études de Painlevé sur les trajectoires en Dynamique et celles d'Hadamard. Celui-ci montre notamment que l'allure des géodésiques dans les surfaces à courbures opposées et à connexion multiple peut dépendre des propriétés arithmétiques de constantes d'intégration.

Les conditions pouvant déterminer une intégrale d'une équation aux dérivées partielles sont très variées. Nous avons parlé du problème de Cauchy ; l'étude des cas exceptionnels de ce problème conduit à la notion des multiplicités caractéristiques, vaguement entrevue par Monge et Ampère. Pour les équations linéaires du second ordre à deux variables, la détermination d'une surface intégrale par la condition de passer par deux caractéristiques a été d'abord étudiée. Dans son grand Ouvrage sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, Goursat a ajouté aux résultats antérieurs les résultats de ses belles recherches personnelles. Beudon, Hadamard, Delassus et Le Roux ont aussi réalisé d'importants progrès dans l'étude des caractéristiques.

Pour les équations particulières, les conditions aux limites sont le plus souvent fournies par la Géométrie ou la Physique. Il arrive en général que tous les éléments envisagés sont réels, et la nature des caractéristiques joue un rôle essentiel dans la position des problèmes. Picard a montré que, pour les équations linéaires, toutes les intégrales sont analytiques quand les caractéristiques sont imaginaires. Les problèmes sont si variés qu'il est impossible de parler de méthodes générales. Cependant dans des cas étendus, on peut employer les méthodes d'approximations successives de Picard, dont nous avons déjà parlé plus haut ; dans d'autres cas, une solution particulière, présentant certaines discontinuités, joue un rôle essentiel : telle la fonction de Green pour le potentiel. On doit de nombreux travaux sur ce sujet à Poincaré, Picard, Hadamard et leurs élèves d'Adhémar, Le Roy, Coulon, Gevrey. Souvent aussi il y a lieu de recourir à des développements généralisant les séries de Fourier, et dont autrefois Fourier lui-même, Poisson, Sturm, et Liouville avaient donné des exemples. Dans cet ordre d'idées, le Mémoire de Poincaré sur la méthode de Neumann renferme des vues originales et profondes sur des fonctions dites *fondamentales*. Le grand Mémoire de Poincaré sur les équations de la Physique mathématique restera particulièrement mémorable ; l'existence des harmoniques en nombre infini d'une membrane vibrante, dont Schwarz et Picard avaient étudié les deux premières, y est établie pour la première fois rigoureusement. Depuis lors, la théorie des équations intégrales de Fredholm a permis de traiter autrement les problèmes de ce genre, mais Poincaré aura été là, comme en d'autres domaines, un précurseur.

C'est surtout dans la théorie des équations aux dérivées partielles que la Physique et la Mathématique se prêtent le mutuel appui dont je parlais au début. J'ajouterai quelques exemples à ceux que nous avons déjà rencontrés. Quand toutes les intégrales ne sont pas analytiques, le prolongement d'une solution réside dans le fait qu'il y a des contacts jusqu'à un certain ordre. Ces notions ont conduit aux résultats importants obtenus par Hugoniot dans la mécanique des fluides et magistralement complétés par Hadamard dans son Livre sur la propagation des ondes. Ailleurs, il pourra y avoir des contacts d'ordre infini entre des intégrales non analytiques, et c'est la raison pour laquelle le célèbre théorème de Lagrange sur les potentiels de vitesse en Hydrodynamique rationnelle ne subsiste pas pour les fluides visqueux, comme Boussinesq l'a indiqué le premier. Une vue très nette des différentes espèces d'ondes, au point de vue de la propagation, résulte de la considération de différents types d'équations. Dans les équations du type de la chaleur, qui remontent à Fourier, il n'y a pas de vitesse de propagation. Les choses se passent autrement dans les équations du type de la propagation du son, qui est aussi celui de la propagation de la lumière et des ondes électriques ; il y a lieu d'envisager là une vitesse de propagation. Les deux types précédents se trouvent rassemblés dans l'équation de la propagation du son dans un liquide visqueux, de l'électricité dans une ligne télégraphique avec self-induction. Il y a dans ce cas propagation par ondes avec une vitesse déterminée, mais cette onde s'étale à l'arrière, comme il résulte des travaux de Poincaré, Picard et Boussinesq. Dans des questions un peu différentes, notamment dans une étude sur le principe d'Huygens, Hadamard a montré l'importance de la parité des dimensions de l'espace et de l'intégrale résiduelle.

Parmi les applications de la théorie des équations différentielles, il en est qui concernent la Géométrie. En France et aussi en dehors de notre pays, cette école d'analystes géomètres, pour qui les problèmes de Géométrie infinitésimale sont l'occasion de belles recherches analytiques, a actuellement Darboux pour chef ; elle se rattache à Monge et à Ampère, tout en utilisant les travaux analytiques les plus récents. Les leçons de Darboux sur la théorie générale des surfaces et ses leçons sur les surfaces orthogonales forment des Ouvrages considérables, où l'auteur expose ses recherches

et aussi celles de ses devanciers, en leur donnant une forme nouvelle et originale. Parmi ces devanciers, nous devons citer Liouville, Bertrand, Bonnet, qui ont été au milieu du siècle dernier les dignes continuateurs de Monge. Relativement à l'intégration effective des équations aux dérivées partielles du second ordre, il n'avait été, pendant de longues années après la publication du Mémoire d'Ampère de 1818, rien ajouté d'essentiel à la théorie développée par le grand géomètre et physicien. Darboux, en 1870, publia un Mémoire fondamental faisant connaître une méthode nouvelle, où il substitua aux équations de Monge une suite indéfinie de systèmes analogues, trouvant même l'intégrale générale si celle-ci ne renferme pas de signe d'intégrale définie. L'étude des systèmes orthogonaux, des surfaces applicables, de la représentation sphérique des surfaces doit à Darboux des progrès considérables ; il a tiré aussi d'importants résultats de la considération de l'équation linéaire aux variations correspondant à une équation quelconque aux dérivées partielles.

Goursat a consacré plusieurs Mémoires à élucider les questions que suggère la méthode de Darboux ; on lui doit aussi de pénétrantes recherches sur des équations intégrables comprenant la première classe d'Ampère, et sur les caractéristiques des équations à plus de deux variables indépendantes. Guichard, qui a montré un esprit inventif dans toutes les parties de la Géométrie infinitésimale, a été un heureux continuateur de Darboux dans ses travaux sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques, et sur la déformation des quadriques. Les recherches de Kœnigs sur la Géométrie réglée, sur les systèmes conjugués, sur les surfaces ayant certains éléments linéaires, et sur les mécanismes dont il a rattaché la théorie à des principes généraux, le placent également parmi les maîtres de la Géométrie infinitésimale et aussi de la Géométrie cinématique.

III. — Théorie des nombres. Algèbre et Géométrie.

La théorie des fonctions analytiques et celle des équations différentielles nous ont conduit plus d'une fois à parler de diverses autres branches des Sciences mathématiques. Il importe cependant

de nous arrêter sur quelques recherches se rapportant plus spécialement à la théorie des nombres, à l'Algèbre, à la Géométrie et à la théorie des groupes.

Les recherches d'Hermite sur la théorie des nombres ont rendu son nom célèbre. L'introduction de variables continues a été l'idée fondamentale qui a dominé la longue suite de ses travaux en Arithmétique supérieure ; les méthodes qu'il a créées ont ouvert à la théorie des nombres des horizons entièrement nouveaux. Un peu plus tard, Hermite passait, de l'approximation simultanée de plusieurs nombres par des fractions de même dénominateur, au problème analogue pour plusieurs fonctions. Ce mode d'approximations algébriques le conduisait en 1873 à une de ses plus mémorables découvertes, je veux parler de la démonstration de la transcendance du nombre e, base des logarithmes népériens. En suivant la voie ouverte par Hermite, le géomètre allemand Lindemann démontrait peu de temps après la transcendance du nombre π, rapport de la circonférence au diamètre.

Les travaux de Jordan sur l'équivalence des formes ont réalisé de grands progrès dans la théorie générale des formes algébriques de degré supérieur. Dans la théorie des formes quadratiques, Poincaré a marqué sa trace par l'introduction de points de vue nouveaux, en particulier sur le *genre* de ces formes. La considération des formes ternaires l'a aussi conduit à une classe de fonctions fuchsiennes présentant un théorème de multiplication. Picard et Humbert ont appliqué la méthode de réduction continuelle d'Hermite à l'étude de divers groupes discontinus.

Parmi les recherches arithmétiques d'une autre nature, les études de Cahen et surtout d'Hadamard sur la théorie asymptotique des nombres premiers doivent être rappelées.

Nous avons dit, au début de cet article, que Galois avait posé les véritables bases de la théorie des équations algébriques. Jordan a publié un Ouvrage considérable sur les substitutions et les équations algébriques. Il y fait une étude approfondie des idées de Galois, en y ajoutant des résultats essentiels sur les groupes primitifs, les groupes transitifs et les groupes composés, dont un des plus importants est que les facteurs de composition d'un groupe sont les mêmes, à l'ordre près, de quelque manière qu'aient été

effectuées les opérations qui les déterminent. Dans la théorie des équations algébriques, Jordan a étudié les équations à groupe composé, abordé et résolu le problème posé par Abel : celui de rechercher les équations de degré donné résolubles par radicaux et de reconnaître si une équation rentre ou non dans cette classe. D'autres travaux algébriques de Jordan se rapportent au problème des groupes linéaires d'ordre fini, dont il indique la formation dans ses grandes lignes; c'est la question des équations différentielles linéaires à intégrales algébriques. Goursat a approfondi un cas particulier intéressant de ce problème, en recherchant les divisions régulières de l'espace en un nombre fini de régions congruentes.

Laguerre a apporté d'importantes contributions à la théorie des équations algébriques. Il fait preuve d'une rare finesse dans ses Notes sur le théorème de Descartes, le théorème de Sturm, la méthode de Newton, et reste toujours soucieux des applications particulières. On a plaisir à retrouver ces résultats rassemblés dans ses Œuvres complètes récemment parues.

Les recherches de Géométrie pure et de Géométrie analytique sont depuis longtemps en honneur dans notre pays, comme le montrent assez les noms de Lamé, de Dupin, de Poncelet et de Chasles. Après Bertrand, Jordan s'occupe des polyèdres dans un beau Mémoire consacré en fait à la Géométrie de situation, et dans un autre travail donne la condition pour que deux surfaces ou portions de surface flexibles et extensibles à volonté soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature. Une partie importante des travaux de Laguerre est consacrée à la Géométrie ; il eut, tout jeune encore, l'heureuse fortune de compléter l'œuvre de Poncelet en Géométrie projective, en montrant comment se fait la transformation des relations angulaires, étendit la théorie des foyers à toutes les courbes algébriques et fonda la Géométrie de direction. De Jonquières a donné le premier exemple des transformations birationnelles de degré quelconque dans le plan, dont Cremona devait indiquer ensuite la forme générale.

Halphen se fit d'abord connaître par ses travaux sur la célèbre théorie des caractéristiques de Chasles, résolvant un problème qui avait arrêté l'illustre géomètre. Les cyclides, c'est-à-dire les

surfaces du quatrième ordre ayant pour ligne double le cercle de l'infini, occupèrent de nombreux auteurs, parmi lesquels Laguerre, Darboux et Moutard; ces deux derniers découvrirent simultanément le remarquable système triplement orthogonal formé de cyclides. Dans son Ouvrage, paru en 1873, sur une classe de courbes et de surfaces algébriques, Darboux a fait connaître un grand nombre de résultats intéressants sur les courbes cyclides et les surfaces cyclides, et a étudié les relations de ces dernières avec les fonctions abéliennes hyperelliptiques. A propos de la Géométrie de Cayley, Darboux donne une interprétation de la Géométrie non-euclidienne dans un demi-espace euclidien, souvent attribuée à Poincaré.

Les courbes gauches algébriques ont fait l'objet d'un grand Mémoire d'Halphen, qui est peut-être sa plus belle œuvre mathématique. Ce travail touche en bien des points à la théorie des fonctions; c'est aussi une étude profonde de Géométrie analytique. L'auteur a réussi à énumérer et à classer en diverses familles les courbes gauches d'un même degré; il montre la précision de ses méthodes en donnant, comme exemple, la classification complète des courbes de degré cent vingt. Entre tant de résultats bien dignes de remarque, Halphen fait connaître la limite inférieure du nombre des points doubles apparents d'une courbe gauche de degré donné, et démontre que les courbes répondant à cette limite sont sur une surface du second ordre.

Certaines surfaces particulières ont attiré particulièrement l'attention des géomètres : telles les surfaces de Steiner et de Kummer. Darboux a indiqué une génération géométrique des lignes asymptotiques de la première, et Picard a montré qu'elle était la seule surface non réglée dont toutes les sections planes sont unicursales. Humbert a fait connaître de nouvelles propriétés de la seconde, notamment que toute courbe algébrique tracée sur elle est l'intersection de celle-ci avec une surface qui la touche tout le long de la courbe. Les surfaces de Kummer singulières ont fourni à Humbert le premier exemple du fait très curieux qu'une surface peut avoir une infinité discontinue de transformations birationnelles en elle-même, sans avoir une infinité continue de telles transformations. Dans un ordre d'idées plus particulièrement géométrique, on doit aussi à Humbert de curieux théorèmes sur les aires sphériques et

ellipsoïdales, qui étendent à la sphère et à l'ellipsoïde des propriétés fondamentales du cercle et de l'ellipse.

La théorie des formes algébriques avait jadis conduit à la notion d'invariant. Dans une Note mémorable, Laguerre fit voir que cette notion peut s'étendre aux équations différentielles linéaires. De son côté Halphen faisait une étude approfondie des équations différentielles restant inaltérées par une transformation homographique quelconque. L'équation différentielle des lignes droites et celle des coniques donnaient les deux premiers exemples ; la découverte d'un invariant du septième ordre amenée par d'ingénieuses considérations géométriques permit à Halphen de développer la théorie générale qu'il étendit aux courbes gauches. Après l'apparition de la Note de Laguerre, Halphen vit de suite le rapport entre ses recherches antérieures et la notion introduite par Laguerre, et il édifia une théorie complète des invariants des équations linéaires. Il montra ensuite l'intérêt de ces recherches pour le calcul intégral, en apprenant à reconnaître si une équation différentielle linéaire est susceptible d'être ramenée à certains types déjà intégrés.

La théorie des groupes est fondamentale en Algèbre ; elle ne joue pas en Analyse un moindre rôle, depuis que le géomètre norvégien Sophus Lie a édifié la théorie des groupes de transformations, faisant une étude approfondie des groupes d'ordre fini et posant les bases de la théorie des groupes infinis. Dans les travaux de Lie, la théorie des groupes intervient essentiellement comme un principe de *classification ;* dans les applications qu'il a faites de sa théorie aux équations différentielles, celles-ci sont des équations particulières. La théorie des groupes a apparu comme un principe de *réduction* depuis que Picard a montré comment les idées de Galois sur les équations algébriques pouvaient êtres étendues aux équations différentielles linéaires ; il a été suivi dans cette voie par Vessiot et par Drach. On doit à Drach d'avoir montré le premier comment la notion de groupe de rationalité pouvait être étendue à toutes les équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles ; c'est ce qu'il appelle l'*intégration logique* qu'il oppose à l'intégration géométrique ou intégration par séries. Vessiot s'est aussi occupé de la théorie de Galois et de ses diverses

généralisations à un point de vue un peu différent, et a publié de beaux Mémoires d'une forme parfaite sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations, et sur la réductibilité et l'intégration des systèmes complets; il a aussi donné la condition pour qu'une équation différentielle linéaire soit intégrable par quadratures, problème qui correspond à celui des équations algébriques résolubles par radicaux.

Les théories générales, pour prendre dans la Science un droit de cité définitif, ont le plus souvent besoin de s'illustrer par des applications particulières. Dans plusieurs domaines, celles-ci ne sont pas toujours faciles à trouver, et des théories très générales risquent quelquefois de rester confinées, si j'ose le dire, dans leur extrême généralité. Il arrive aussi que les applications tentées ramènent seulement à des cas déjà connus; dans ce cas, la théorie, intéressante au point de vue de la classification, n'apparaît pas comme une arme pour la découverte de faits nouveaux. Aussi est-il intéressant de rappeler que la recherche du groupe de rationalité de l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface des ondes a conduit Drach à l'intégration de cette équation, cherchée en vain depuis longtemps.

Les recherches de Cartan sur la théorie des groupes sont très importantes. Elles concernent surtout la *structure* des groupes et la détermination des groupes *simples*. Pour les groupes continus et *finis*, les principes avaient été posés par Lie et ses élèves; pour les groupes infinis, tout était à créer. Cartan a réussi à déterminer tous les groupes infinis *simples*, transitifs ou intransitifs. Je dois encore rappeler les travaux de Cartan sur les systèmes de Pfaff et les systèmes en involution.

IV. — Théorie des fonctions de variables réelles et Théorie des ensembles.

Un des principaux objets de l'Analyse abstraite est l'étude de l'idée de fonction, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plusieurs variables. Il a fallu longtemps pour qu'on se rendît compte de l'étendue de cette notion; c'est là d'ailleurs une circonstance très heureuse pour les progrès de la Science. Si Newton et Leibniz avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessaire-

ment une dérivée, le Calcul différentiel n'aurait pas pris naissance; de même les idées inexactes de Lagrange sur la possibilité des développements en série de Taylor ont rendu d'immenses services. Les fonctions analytiques, qui sont les seules usuelles, ont pris une importance considérable, et l'on a vu plus haut que la théorie de ces fonctions est une branche maîtresse de l'Analyse. Un jour devait venir cependant où l'idée de fonction serait approfondie dans toute sa généralité. Cauchy, dans plusieurs de ses écrits, avait donné plus de précision à certains résultats intuitifs sur les fonctions continues admis sans démonstration. En Allemagne, Dirichlet en donnant des conditions pour la possibilité du développement en série trigonométrique, Riemann en établissant la distinction entre les fonctions intégrables et les fonctions non intégrables, Weierstrass en donnant un exemple de fonction continue sans dérivée, allèrent beaucoup plus loin. En France, le Mémoire de Darboux sur les fonctions discontinues marque une date ; on y trouve une proposition qui permet de définir de la manière la plus nette l'intégrabilité d'une fonction, et de nombreux exemples de fonctions continues sans dérivées. Jordan a introduit dans cette partie de l'Analyse d'importantes notions : telle la notion de fonction à variation bornée. Les courbes, dites de Jordan, séparant le plan en deux régions distinctes sont également devenues classiques.

Le géomètre allemand Cantor a fondé la théorie des *ensembles* de points. On doit attacher une grande importance à la distinction entre les ensembles énumérables et les autres. Il en est de même pour la notion d'ensemble *dérivé* et d'ensemble *parfait.* Le nombre des Mémoires consacrés aux ensembles est considérable : ils sont de valeur très inégale, au moins au point de vue purement mathématique. Un certain nombre d'entre eux n'ont actuellement aucun intérêt mathématique : c'est ce qui arrive pour les études sur les nombres transfinis qui n'ont conduit jusqu'ici à aucun résultat inaccessible par une autre voie. On rencontre dans cette *métamathématique* quelques paradoxes et des difficultés qui ont fait couler des flots d'encre. Plusieurs de ces difficultés proviennent de ce qu'on ne s'entend pas sur le mot *existence,* et l'on pourrait faire des comparaisons avec certaines

querelles célèbres dans la philosophie scolastique au moyen âge. Reconnaissons d'ailleurs que les discussions des mathématiciens sur ce mot intéressent d'autres questions, notamment celles qui concernent les théorèmes dits *d'existence* et se rencontrent dans diverses parties des Mathématiques.

Nous envisageons seulement la partie de la théorie des ensembles, qui jusqu'ici a été un instrument de découverte entre les mains des mathématiciens; c'est celle qui a été utilisée dans la théorie des fonctions et en Géométrie. Jordan avait donné une définition de la mesure d'un ensemble. Borel a repris la question sous un jour nouveau, en utilisant des définitions constructives; il a aussi introduit la notion importante d'un ensemble de *mesure nulle*. Dans plusieurs théories, on connaît maintenant des propositions qui sont exactes *à peu près partout*, en entendant par là que réserve est faite pour un ensemble de mesure nulle. Citons, comme exemple, le théorème de Borel, d'après lequel toute fonction bornée définissable analytiquement est égale, sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle, à une série convergente de polynomes. Les séries de Fourier et celles qui les généralisent offrent des exemples analogues.

Riemann, semblait-il, avait approfondi autant qu'il est possible la notion d'intégrale définie. Lebesgue a montré qu'il n'en était rien. L'idée de fonction *sommable*, qu'il a introduite dans la Science, est plus générale que celle de fonction *intégrable* de Riemann, au moins pour les fonctions bornées. Une conséquence de cette notion généralisée de l'intégrale est que toute fonction bornée sommable est la dérivée de son intégrale indéfinie, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle. Ces travaux ne sont pas restés sans applications, et les idées nouvelles ont montré leur fécondité entre les mains de Lebesgue et de ceux qui l'ont suivi. La théorie des séries de Fourier notamment s'est trouvée renouvelée. Loin de conduire à des complications nouvelles, l'emploi de l'intégration des fonctions sommables apporte d'heureuses simplifications. Borel a repris récemment la théorie de l'intégrale définie en se plaçant au même point de vue que dans sa théorie de la mesure.

Les notions d'aire et de surface sous leurs formes les plus générales sont liées à la théorie des ensembles. Lebesgue a été très

loin dans cette voie, où l'on rencontre vite des énoncés différents de ceux auxquels on est habitué, par exemple celui-ci : qu'il y a d'autres surfaces que les surfaces développables qui sont applicables sur le plan.

Baire répartit les fonctions en différentes classes et cherche la condition pour qu'une fonction d'une variable réelle puisse être développée en série de polynomes. La théorie des ensembles intervient dans la solution ; pour le cas d'une série *simple*, la condition est que la fonction soit ponctuellement discontinue par rapport à tout ensemble parfait. Les recherches de Lebesgue sur les fonctions représentables analytiquement sont connexes de celles de Baire, et posent de graves questions sur le sens qu'il convient d'attribuer au mot *défini*.

Il est une branche de l'Analyse, qui prend aujourd'hui une grande importance : c'est le *Calcul fonctionnel*. Un des premiers Chapitres du Calcul fonctionnel est le *Calcul des variations* auquel reste justement attaché le nom de Lagrange. Le problème du plus court chemin d'un point à un autre sur une surface est sans doute le premier type de problème relatif à ce calcul, qui s'est ensuite développé avec diverses questions posées par la Mécanique, et qui englobe aujourd'hui la Mécanique analytique tout entière. Le Traité que publie en se moment Hadamard sur le Calcul des variations fait connaître les plus récents travaux en cette matière. De nombreux problèmes de l'Électricité et de la Chaleur relèvent aussi du Calcul fonctionnel. La théorie des *équations intégrales*, brillamment créée tout d'abord en Italie et en Suède par Volterra et Fredholm, a fait en France l'objet de nombreux travaux, parmi lesquels ceux de Le Roux intégrant en même temps que Volterra les équations à limite supérieure variable, de Goursat sur les noyaux orthogonaux, de Picard sur les équations de première espèce et les équations singulières, de Marty sur les noyaux symétrisables. Hadamard s'est surtout attaché à mettre en évidence l'influence de la forme de la frontière du domaine dans divers problèmes de Physique mathématique, appelant l'attention sur les *équations aux dérivées fonctionnelles* ; il a été suivi avec succès dans cette voie par P. Lévy. L'étude du *continu fonctionnel*, nécessitant la création d'un nouveau Chapitre de la théorie des ensembles, a été abordée très heureusement par Fréchet.

L'extension de nos idées sur les fonctions et les opérations fonctionnelles n'est pas la seule qu'aient poursuivie les mathématiciens. La question des quantités complexes a fait, surtout à l'étranger, l'objet de nombreuses recherches. Si on laisse tomber la loi commutative, ne gardant que la loi associative, on a une Algèbre beaucoup plus générale ; un exemple célèbre à quatre unités est fourni par les quaternions de Hamilton. Une remarque fondamentale de Poincaré ramène toute la théorie des quantités complexes à une question concernant la théorie des groupes. Elle consiste en ce que, à chaque système d'unités complexes à multiplication associative, correspond un groupe continu linéaire de substitutions linéaires, et inversement. Le rapprochement entre la théorie des groupes de Lie et les nombres complexes donne la véritable origine de ces symboles. Divers auteurs étrangers avaient utilisé l'idée de Poincaré ; dans ses travaux sur le même sujet, Cartan applique une méthode directe qui le conduit à des résultats nouveaux. Ces quantités complexes plus générales sont-elles susceptibles d'accroître la puissance de l'Analyse ? Jusqu'ici l'emploi des quaternions a seul rendu quelques services en Physique mathématique. On pouvait espérer que les nouvelles quantités complexes présenteraient quelque intérêt pour l'Analyse générale ; les essais tentés jusqu'ici n'ont pas été couronnés de succès.

V — Quelques remarques finales.

La course rapide que nous venons de faire à travers les principales disciplines où s'exerce l'effort des mathématiciens aura peut-être montré la fécondité de cette branche de la Science française depuis un demi-siècle. Les divisions et classifications, qui ont été nécessaires pour l'exposition, sont d'ailleurs bien artificielles et plus d'un sujet aurait pu être classé dans une autre section de cette étude. La pénétration entre elles des diverses parties d'une même science, et souvent même de sciences diverses, est d'ailleurs de plus en plus générale. Nous n'avons pas voulu ici faire de critique scientifique. Disons seulement que l'écueil des recherches mathématiques est dans un formalisme et un symbolisme excessifs, incapables de conduire à un fait nouveau et d'être utilisés dans une autre recherche que celle-là

même pour laquelle ils ont été créés. Or, quand ces dernières conditions ne sont pas remplies, on peut penser qu'il n'y a pas eu progrès réel de la Science. A cet égard, il semble que les mathématiciens français sont restés sagement dans de justes limites, n'oubliant jamais que leur science n'est pas un pur exercice de logique, et se montrant avant tout soucieux de la découverte de faits mathématiques nouveaux et de rapprochements jusque-là insoupçonnés.

Nous nous sommes expliqué au début sur les rapports entre les Mathématiques et la Physique, et nous avons dit que les applications à la Mécanique et à la Physique étaient loin d'être le seul objet des études des mathématiciens. Il est bon cependant que de temps à autre, quand notre science tend à devenir trop formelle, nous nous rappelions la pensée de nos grands géomètres physiciens de la première moitié du siècle dernier. Dans notre vision actuelle du monde, l'Analyse mathématique reste un instrument indispensable aux progrès des théories physiques, offrant aux physiciens des moules pour leurs vues théoriques; en échange, les physiciens rendent aux mathématiciens un service d'un haut prix, en les guidant dans l'infinie variété des formes que conçoit notre esprit et les empêchant à certaines heures d'errer à l'aventure. La Mathématique n'apparaît plus alors comme la science étrange et mystérieuse que se représentent tant de gens ; elle est une pièce essentielle dans l'édification de la Philosophie naturelle.

TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie.
58203 Quai des Grands-Augustins, 55.



(Augmentation de 10 °/。 sur les prix marqués.)

HERMITE. — Œuvres de Charles Hermite publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par ÉMILE PICARD, Membre de l'Institut. 3 vol. in-8 (25-16) se vendant séparément.

TOME I. Volume de XL-500 pages avec un portrait d'Hermite; 1905. 18 fr.

TOME II. Volume de VI-520 pages avec un portrait; 1908....... 18 fr.

TOME III. Volume de VI-524 pages avec un portrait; 1912....... 18 fr.

TOME IV et DERNIER. Volume de VI-596 pages, avec 2 planches, reproduction de la médaille du Jubilé d'Hermite et un fac-similé de lettre; 1917.. 25 fr.

PICARD (**Émile**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Traité d'Analyse** (Cours de la Faculté des Sciences). 3 volumes in-8 (25-16) avec figures.

TOME I : *Intégrales simples et multiples. — L'équation de Laplace et ses applications. — Développement en séries. — Applications géométriques du Calcul infinitésimal*, 2e édition, revue et corrigée. Volume de XV-483 pages, avec 25 fig.; 1901.............................. 16 fr.

TOME II : *Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. — Introduction à la théorie des équations différentielles. — Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann*, 2e édition, revue et corrigée. Volume de XVI-585 pages, avec 58 figures; 1905.............................. 18 fr.

TOME III : *Des singularités des intégrales des équations différentielles. Étude du cas où la variable reste réelle; des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires. Analogie entre les équations algébriques et les équations linéaires*. 2e édition, revue et augmentée. Volume de X-604 pages, avec 25 fig.; 1908............ 18 fr.

PICARD (**E.**), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **SIMART** (**G.**), Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes**. 2 volumes in-8 (25-16) se vendant séparément :

TOME I : Volume de VI-256 pages, avec figures; 1897......... 9 fr.

TOME II : Volume de VI-528 pages ; 1906.................. 18 fr.

PICARD (**E.**), Membre de l'Institut. — **Sur le développement de l'Analyse et ses rapports avec diverses sciences.** Conférences faites en Amérique en 1899 et 1904. In-8 (23-14) de VI-168 pages; 1905.... 3 fr. 50 c.

PICARD (**Émile**), Membre de l'Institut. — **Quelques réflexions sur la Mécanique, suivies d'une première Leçon de Dynamique.** In-8 (23-14) de 57 pages 1902.................................... 1 fr. 50 c.

PICARD (**Émile**), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **L'Œuvre de Henri Poincaré.** In-4 (28-23) de 22 pages; 1913... 2 fr.

58438 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.